

文章编号: 1000-8055(2001)04-0402-06

星型齿轮传动非线性动力学建模 与动载荷研究

孙智民, 沈允文, 王三民, 侯 宇
(西北工业大学 机械系, 陕西 西安 710072)

摘要: 本文建立了星型齿轮传动的弯扭耦合非线性动力学计算模型, 模型中考虑了原动机和负载惯性, 齿轮副的啮合综合误差, 齿轮的偏心误差, 时变啮合刚度以及齿轮的啮合间隙。采用适当的广义坐标变换, 将线性恢复力和非线性恢复力共存的动力学方程组统一成矩阵形式, 用数值解法获得了在有间隙非线性的情况下受强参数激励和多频激励的系统的动态响应和动载荷历程。最后给出了一个算例, 讨论了间隙、齿频误差和偏心误差对齿轮系统的响应、动载荷以及各星轮的载荷分配均匀性的影响。并研究了刚度和误差激励和间隙的相互耦合关系, 得出对星型齿轮传动设计和制造有意义的结论。

关键词: 行星齿轮传动; 动力学; 非线性振动
中图分类号: TH132.33 **文献标识码:** A

1 前 言

目前, 国内外学者对于行星及星型齿轮传动的动态特性已经进行了许多研究^[1, 3~9]。文献[1, 4, 7~9]分别针对行星轮系和星型轮系, 采用了包含了偏心误差和时变啮合刚度的线性模型; 文献[3, 6]建立了行星轮系的非线性模型, 但没有考虑偏心误差和行星轮的横向振动; 文献[6]提出了行星轮系的非线性模型, 模型中假定无齿轮制造和安装误差, 并在实验时对把行星轮系固定行星架而转化为星型轮系进行了动载荷测试。以上文献虽然对行星和星型轮系的动态特性做了不同程度的研究, 但同时考虑间隙和误差以及时变啮合刚度影响的弯扭耦合多自由度强非线性动力学系统的分析还未见于文献。

本文研究了星型齿轮传动系统的非线性动态特性。众所周知, 齿轮系统由于制造和装配的原因, 齿轮间啮合时不可避免的具有误差和间隙。传统的线性动力学不考虑啮合间隙, 在一定条件下可以满足计算的精度要求, 但随着高速化和柔性化齿轮系统的发展, 仅用线性模型显然已经不能

解释在齿轮啮合中出现的一些现象。因此, 建立星型轮系的非线性动力学模型, 研究其非线性振动机理和动态特性, 以及载荷分配的动态均匀性, 对于进一步提高减速器的功重比, 延长工作寿命, 保证其工作可靠性方面都具有重要意义。

2 系统的非线性动力学模型

图 1 所示为星型齿轮传动简图。整个系统由太阳轮 z_s , 星轮 z_{pi} (N 个), 齿圈组成。

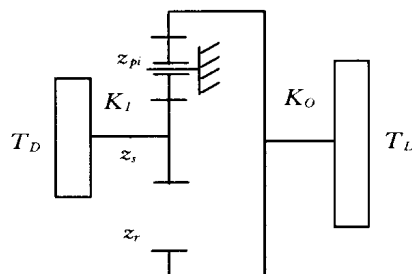


图 1 星型齿轮传动

建模时采用集中质量模型, 假定齿轮均为直

收稿日期: 2000- 10- 23; 修订日期: 2000- 06- 11

基金项目: 国家自然科学基金重点基金资助项目(59835040)

作者简介: 孙智民(1974-), 男, 西北工业大学机械系博士生

齿圆柱齿轮, 各星轮具有相同的物理和几何参数,

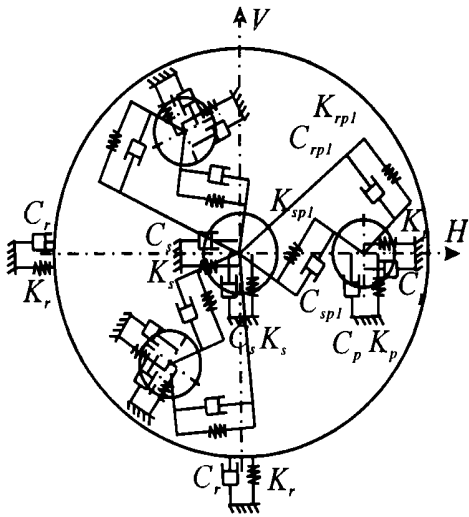


图 2 星型齿轮传动计算模型

$$\left. \begin{aligned} x_{spi} &= x_s - x_{pi} + H_s \cos \frac{2\pi}{3}(i-1) - \alpha + V_s \sin \frac{2\pi}{N}(i-1) - \alpha - \zeta_i \sin \alpha - \eta_i \cos \alpha - e_{spi}(t) \\ x_{rpi} &= x_{pi} - x_r + \zeta_i \sin \alpha - \eta_i \cos \alpha + H_r \cos \left[\frac{2\pi}{3}(i-1) - \alpha \right] + V_r \sin \left[\frac{2\pi}{N}(i-1) - \alpha \right] - e_{rpi}(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$
$$\left. \begin{aligned} e_{spi}(t) &= E_{spi} \sin(\omega t + \varphi_{spi}) - E_s \omega \sin \left[\omega t + \beta_s - \frac{2\pi}{N}(i-1) + \alpha \right] + E_{pi} \omega \sin(\omega t + \beta_{pi} - \alpha) \\ e_{rpi}(t) &= E_{rpi} \sin(\omega t + \varphi_{rpi}) + E_{pi} \omega \sin(\omega t + \beta_{pi} + \alpha) - E_s \omega \sin \left[\omega t + \beta_r + \frac{2\pi}{N}(i-1) + \alpha \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: α 为齿轮副的啮合角; e_{spi} 和 e_{rpi} 分别为齿轮副沿作用线的误差函数; E_{spi} 和 E_{rpi} 分别为齿轮副沿作用线的综合齿频误差; φ_{spi} 和 φ_{rpi} 分别为 E_{spi} 和 E_{rpi} 的初相位; E_s , E_{pi} 和 E_r 分别为各齿轮的偏心误差; β_s , β_{pi} 和 β_r 分别为各偏心误差的初相位; ω 为啮合齿频 ($\omega = 2\pi n_s/60z_s$, z_s 为太阳轮齿数); ω_s , ω_p 和 ω_r 分别为各齿轮的偏心误差频率 ($\omega_s = 2\pi n_s/60$; $\omega_p = \omega_s/z_p$; $\omega_r = \omega_s/z_r$)。

齿轮之间的啮合力为:

$$\left. \begin{aligned} P_{spi} &= K_{spi}(t) \cdot f(x_{spi}, b_{spi}) \\ P_{rpi} &= K_{rpi}(t) \cdot f(x_{rpi}, b_{rpi}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, $K_{spi}(t)$ 和 $K_{rpi}(t)$ 分别为各啮合齿轮副的时

变啮合刚度; f 为间隙非线性函数:

$$f(x, b) = \begin{cases} x - b & x > b \\ 0 & -b \leq x \leq b \\ x + b & x < -b \end{cases} \quad (4)$$

式中: b_{spi} , b_{rpi} 为齿轮副之间的间隙之半。

齿轮之间的啮合振动阻尼力为:

$$\left. \begin{aligned} D_{spi} &= C_{spi} \cdot \dot{x}_{spi} \\ D_{rpi} &= C_{rpi} \cdot \dot{x}_{rpi} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: C_{spi} 和 C_{rpi} 分别为齿轮副的阻尼系数。

令 $x_{Ds} = x_D - x_s$, $x_{rL} = x_r - x_L$, 则系统的微分方程为:

$$\left. \begin{aligned} m_D \ddot{x}_D + \frac{K_L}{r_{2sb}} x_{Ds} + \frac{C_L}{r_{2sb}} \dot{x}_{Ds} &= \frac{T_D}{r_{sb}}, \quad m_s \ddot{x}_s - \frac{K_i}{r_{2sb}} x_{Ds} - \frac{C_i}{r_{2sb}} \dot{x}_{Ds} - \sum_{i=1}^N (P_{spi} + D_{spi}) = 0 \\ M_s \ddot{H}_s + K_s H_s + C_s \dot{H}_s + \sum_{i=1}^N (P_{spi} + D_{spi}) \cos \left[\frac{2\pi}{N}(i-1) - \alpha \right] &= 0 \\ M_s \ddot{V}_s + K_s V_s + C_s \dot{V}_s + \sum_{i=1}^N (P_{spi} + D_{spi}) \sin \left[\frac{2\pi}{N}(i-1) - \alpha \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 m_{pi} \ddot{x}_{pi} - (P_{spi} + D_{spi}) + (P_{rpi} + D_{rpi}) &= 0 \\
 M_{pi} \ddot{\xi}_{pi} + K_p \zeta_{pi} + c_p \dot{\zeta}_{pi} - (P_{spi} + D_{spi}) \sin \alpha + (P_{rpi} + D_{rpi}) \sin \alpha &= 0 \\
 M_{pi} \ddot{\eta}_{pi} + K_p \eta_{pi} + c_p \dot{\eta}_{pi} - (P_{spi} + D_{spi}) \cos \alpha + (P_{rpi} + D_{rpi}) \cos \alpha &= 0 \\
 M_{ri} \ddot{H}_s + K_r H_r + C_r \dot{H}_r + \sum_{i=1}^N (P_{rpi} + D_{rpi}) \cos \left[\frac{2\pi}{N} (i-1) + \alpha \right] &= 0 \\
 M_{ri} \ddot{V}_s + K_r V_r + C_r \dot{V}_r + \sum_{i=1}^N (P_{rpi} + D_{rpi}) \sin \left[\frac{2\pi}{N} (i-1) + \alpha \right] &= 0 \\
 m_L \ddot{x}_L - \frac{K_O}{r_{2rb}} x_{rL} - \frac{C_O}{r_{2rb}} \dot{x}_{rL} &= - \frac{T_L}{r_{rb}}
 \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

式中: m_s, m_{pi} 和 m_r 为各齿轮在其基圆半径 r_b 上的等效质量; M_s, M_{pi} 和 M_r 为各齿轮质量; m_i 为原动机在 r_{sb} 上的等效质量; m_L 为负载在 r_{rb} 上的等效质量; T_D 为输入转矩; K_i 为输入轴的扭转刚度; K_O 为输出轴的扭转刚度; K_s, K_p 的 K_r 为各齿轮支承轴弯曲刚度; T_L 为负载转矩。

微分方程组(6)为半正定、时变参数、非线性二阶微分方程组, 其中既有非线性恢复力项, 又有线性恢复力项, 同时系统坐标中包含了刚体位移, 因此无法直接写成矩阵形式的二阶微分方程, 而多自由度系统的求解分析方法如果不能基于矩阵形式进行, 是无法进行实际求解分析的。为此, 引入系统的一组广义坐标为:

$$\begin{aligned}
 X = \{ & X_{Ds}, X_{sp1}, X_{sp2}, \dots, X_{spN}, X_{rp1}, X_{rp2}, \dots, \\
 & X_{rpN}, x_{rL}, H_s, V_s, \zeta_1, \eta_1, \zeta_2, \eta_2, \\
 & \dots, \zeta_N, \eta_N, H_r, V_r \}^T
 \end{aligned}$$

则系统的自由度由原来的 $(3N+8)$ 个增加到 $(4N+6)$ 个, 同时将 $H_s, V_s, \zeta_i, \eta_i$ ($i=1, 2, \dots, N$), H_r, V_r 所对应的线性恢复力表示为间隙为 0 的特殊间隙非线性函数, 方程(5)表示为矩阵形式即为:

$$[M] \ddot{X} + [C] \dot{X} + [K] f(X) = p \quad (7)$$

其中 $[M]$, $[C]$ 和 $[K]$ 分别为 $(4N+6) \times (4N+6)$ 的质量矩阵, 阻尼矩阵, 刚度矩阵, p 为载荷列向量, $f(X)$ 为间隙非线性函数列向量, 具有下面的统一形式:

$$f_i = f(x_i) = \begin{cases} x_i - b_i & x_i > b_i \\ 0 & -b_i \leq x_i \leq b_i \\ x_i + b_i & x_i < -b_i \end{cases} \quad (8)$$

4 齿轮副啮合参数分析

齿轮制造和安装产生的各类误差是产生齿轮振动的主要因素。研究时考虑了齿轮的基节误差和齿廓误差, 取其为以齿轮啮合周期而变化的正弦函数。各齿轮的大周期偏心误差是产生星型轮

系动载荷不均匀的主要因素, 因此研究时考虑了安装和制造产生的齿轮偏心误差。

周期性变化的啮合刚度是齿轮的振动的主要激振源。本文采用石川法计算齿轮副的啮合刚度。

在星型轮系中, 当太阳轮和齿圈的齿数不是星轮个数的整数倍时, 太阳轮和齿圈与星轮之间不再是同步啮合, 而是保持一定的啮合相位。因此, 在进行动力学分析时, 须根据系统中各齿轮齿数来确定各个齿轮对相应的啮合相位^[9]。

齿轮副的有效啮合阻尼系数为^[2]:

$$C_{12} = 2\zeta \sqrt{\frac{\bar{K}_{12}}{1/m_1 + 1/m_2}} \quad (9)$$

输入轴和输出轴的扭转阻尼系数^[2]:

$$C_T = \zeta_T \sqrt{\frac{K_T}{1/J_{io} + 1/J_g}} \quad (10)$$

支承轴的弯曲阻尼系数^[2]:

$$C_s = \zeta_s \sqrt{K_s \cdot m_g} \quad (11)$$

式中: $\bar{K}_{12}$ 为齿轮副平均啮合刚度; m_1 和 m_2 分别为啮合齿轮的等效质量; 阻尼比 ζ 的取值范围约为 0.03~0.1, 本文中取为 0.07^[2]。 K_T 为轴的扭转刚度, J_{io} 为原动机或负载的转动惯量, J_g 为太阳轮或齿圈的转动惯量; 阻尼比 ζ_T 的取值范围约为 0.005~0.075^[2], 本文中取为 0.01。 K_s 为支承轴的弯曲刚度, m_s 为轴和轴上的齿轮的质量之和, 阻尼比 ζ_s 的取值范围约为 0.003~0.1^[2], 本文中取为 0.01。

5 方程的求解及结果分析

对多频激励、参变耦合的间隙型非线性微分方程组(7), 本文用变步长 Gill 积分方法来得到方程的数值解。最后针对某减速器 ($N=3$) 用上述方法进行了计算。减速器参数如下: 齿数: $z_s=15$; $z_{p1}=18$; $z_r=51$; 模数: $m=3.0$ mm; 压力角: $\alpha=20^\circ$; 齿宽: $B=15$ mm; 各齿轮偏心误差: $E_s=E_p=$

$E_r = 15\text{ }\mu\text{m}$; 偏心误差的初始相位角: $\beta_s = \beta_{pi} = \beta_r = 0$; 齿频误差: $e_{spi} = e_{rpi} = 10\text{ }\mu\text{m}$; 齿频误差初始相位角: $\Phi_{spi} = \Phi_{rpi} = 0$; 驱动转矩: $T_D = 90\text{ N}\cdot\text{m}$; 负载转矩: $T_L = 306\text{ N}\cdot\text{m}$ 。

下文中的图 3(a)~(f), 图 4(a)~(f) 和图 5(a)~(h) 分别为在 $n_s = 5000\text{ r/m}$ 的不同参数下的系统动态性能曲线, 图 3 为系统在无间隙受齿频误差而无偏心误差激励情况下的动态响应, 图 4 为系统在齿侧间隙 $b = 50\text{ }\mu\text{m}$ 下并受齿频误差而无偏心误差激励的动态响应, 图 5 为系统在齿侧间隙 $b = 100\text{ }\mu\text{m}$ 下受齿频误差并受偏心误差激励的动态响应。各图中坐标 τ 为轮齿的啮合周期 $\left[\tau = \frac{60}{n_s \cdot Z_s}\right]$, ω 为啮合齿频, 图(a)和(d)分别为 x_{sp1} 和 x_{rp1} 的时间历程, 图(b)和(e)分别为 x_{sp1} 和 x_{rp1} 的 FFT 频谱, 图(c)和(f)分别为 Z_s 和 Z_{p1}, Z_r 和 Z_{p1} 之间的啮合动载系数时域历程, 图中 $P = \frac{T_D}{r_{sb}\circ}$ 。

由图 3 可见, 系统的位移响应曲线(图 3(a)和(d))以齿频波动, 同时在每一齿频周期内又包含有高频振动。通过对位移响应进行 FFT 后的频谱图(图 3(b)和(e))可发现频率为 $m\omega$ (m 为正整数)的离散谱, 而且齿频 ω 的谱值远大于次最大频谱(5ω)的值, 其比值分别为 7.5 和 2.8。因此, 在单频激励的情况下, 系统的响应主要表现为齿频的整数倍的超谐波响应, 其中齿频的响应贡献最大。原因主要是啮合刚度主要以齿频为基频波动, 同时包含了基频的倍频成分。因为系统为线性时

变系统并受单频激励, 而以齿频为基频波动的齿轮副时变啮合刚度中含有倍频成分, 刚度中的高频成分使得系统响应中出现了超谐波响应。在这种情况下, 如图 3(c)和(f)所示, 动载荷系数以齿频为周期波动, 各星轮的载荷分配未出现不均匀。这与文献[3, 9]中的计算结果相一致。

当系统存在间隙而无偏心误差时, 由图 4(a)和(d)位移响应时间历程可观察到在图 3 中不存在的低频调制波形, 调制波形的频率经 FFT 频谱分析为 0.02ω 。在频谱图上依然可观察到在图 3 中出现的超谐波响应, 不同的是在图 4 中的超谐波响应所对应的频率数目更多一些, 虽然基频的谱值仍保持最大, 但各超谐波成分的谱值均有不同程度的增大, ω 的谱值与次最大频谱之比在图 4(b)和(e)中分别约为 3.4 和 2.1。图 4(c)和(f)中轮齿的动载荷系数有所增加, 但幅度不大; 同样, 各个星轮上没有出现载荷分配不均匀现象。由上面的分析可见, 间隙的存在强化了时变啮合刚度的高频成分在系统响应中的影响, 而且由于刚度和间隙的相互耦合, 使得系统响应中出现了低频的调制波形。由于系统未出现脱啮和齿背冲击, 因此, 系统的动载荷并未有大幅度的变化。

由图 5 可见, 当存在齿轮偏心误差时, 系统的动态响应的波动幅度增大(图 5(a)和(d)), 并且因偏心误差的轴频激励使得系统产生明显的低频响应, 一系列低频频谱密集分布在响应的频谱图上(图 5(b)和(e)), 频谱图不像图 3 和图 4 的主

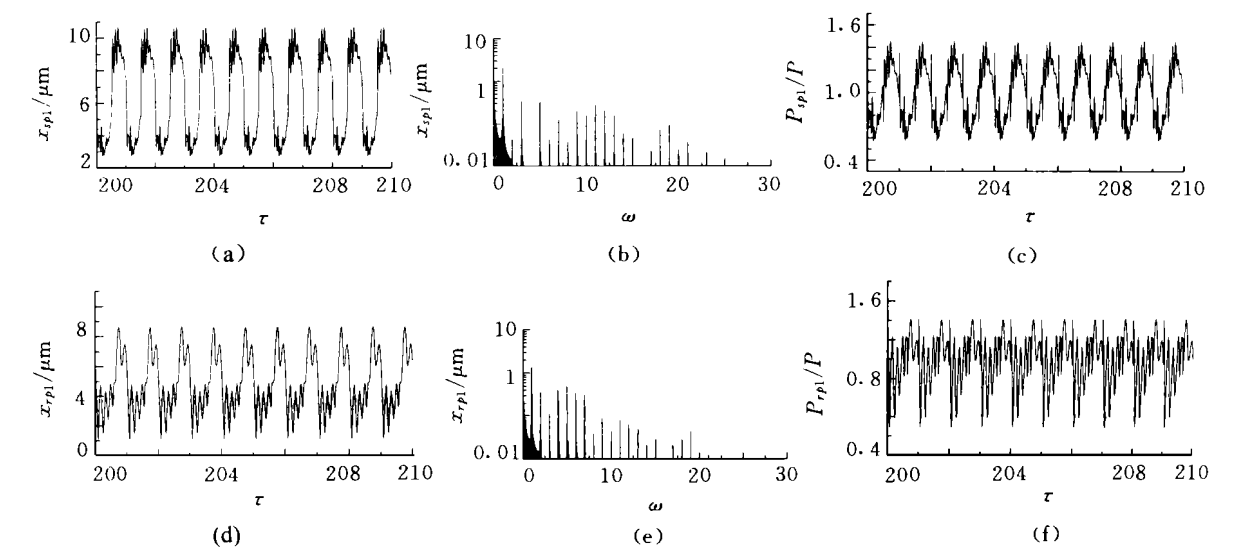


图 3 无偏心误差和间隙时系统的动态特性

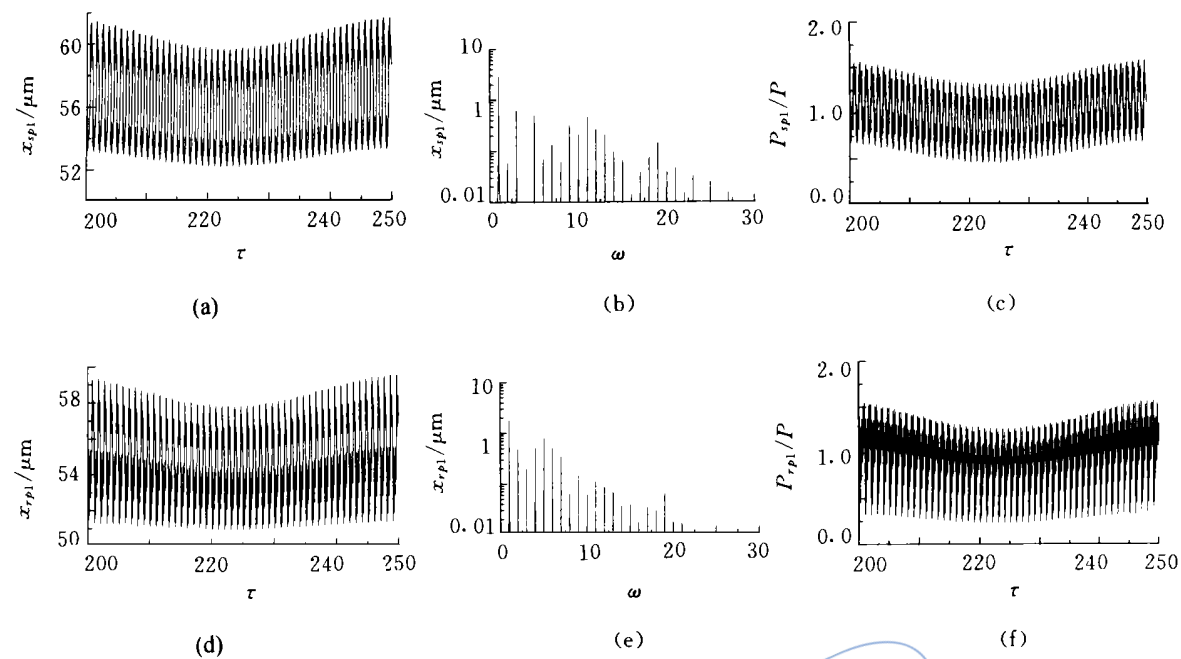


图 4 无偏心误差有间隙时系统的动态特性

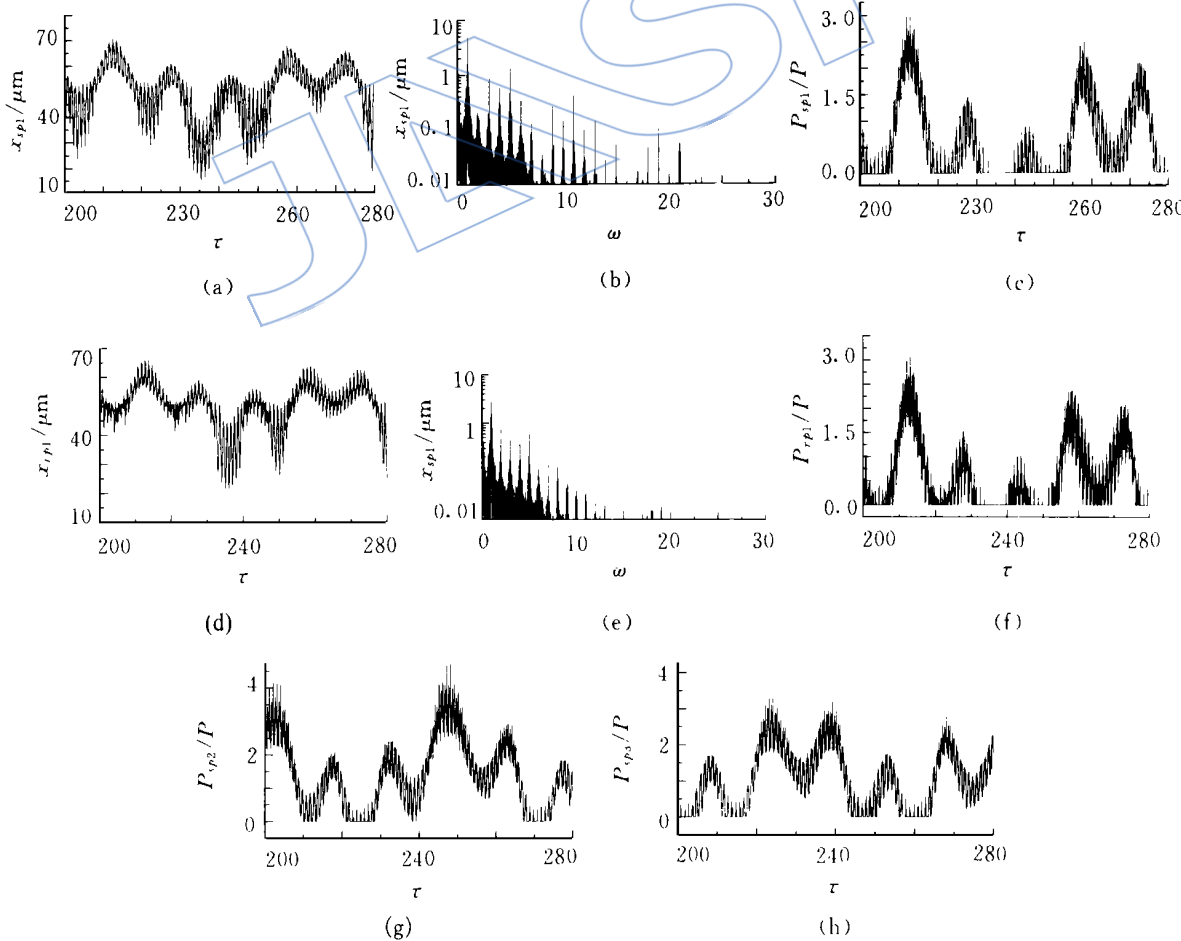


图 5 有偏心误差和间隙时系统的动态特性

要以离散频谱构成,而是出现了若干非基频整数倍的频谱。同时在图(c)和(f)的动载荷系数曲线可看出,在轮齿的啮合过程中出现了啮合齿面分离和结合的反复冲击现象,齿面分离表现为轮齿间的啮合动载荷系数为 0,而在图 3 和图 4 中均未发现动载荷系数为 0 的情况,在图 5 中则可清楚发现齿面分离的情况。图(g)和(h)分别为 z_s 和 z_{p2} , z_s 和 z_{p3} 之间的啮合动载系数时域历程,将(g), (h)与图(c)相对照,可以得出,由于偏心误差的存在,各星轮受载出现了明显的载荷不均匀现象。同时,轮齿最大动载荷也因偏心误差的存在而从图 4 中的 1.51 增加到 4.5,由此可见偏心误差加剧了系统的非线性特征,不仅使系统出现了载荷分配不均现象,而且使得系统的动载荷增大,使系统的动态特性恶化,所以在制造和装配时应尽力避免各类偏心误差的存在。

5 结 论

(1) 在时变啮合刚度的影响下,即使不存在间隙,星型齿轮传动系统对单频的误差激励也会产生多频的响应。

(2) 间隙的存在使得在单频激励下系统响应出现低频的调制频率。在无偏心误差激励且齿轮啮合不发生齿面分离冲击时,间隙对齿轮动载荷和各星轮的载荷均匀性的影响很小。

(3) 系统的偏心误差可以导致轮齿的动载荷系数明显增大,并使轮齿之间产生载荷不均匀现象,在相同振动参数情况下,由偏心误差可导致齿

面分离冲击。

参考文献

- [1] 方宗德, 沈允文, 黄镇东. 三路功率分流星型式减速器的动态特性[J]. 航空学报, 1990, 11(7): 341~350
- [2] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学—振动、冲击、噪声[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [3] 孙涛. 行星齿轮系统非线性动力学研究[D]. 西北工业大学博士论文, 2000.
- [4] 邵长健. 基于结构动力学修改重分析的航空齿轮系统减振研究[D]. 西北工业大学硕士论文, 1996.
- [5] Cunliffe F, Smith J D, Welbourn, D B. Dynamic Tooth Loads in Epicyclic Gears[J]. Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, 1974: 578- 584
- [6] August R, Kasuba R. Torsional Vibrations and Dynamic Loads in a Basic Planetary Gear System[s]. Transactions of the ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1986, 108: 348- 353
- [7] Saada A, Yelez P. An Extended Model for the Analysis of the Dynamic Behavior of Planetary Trains[J]. Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, 1995, 117: 241 - 247.
- [8] Yelez P, Flamaud L. Dynamic Response of Planetary Trains to Mesh Parametric Excitation [J]. Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, 1996, 118: 7- 14
- [9] Hidaka T, Terauchi Y, Dohi K. On the Relation between the Run-Out Errors and the Motion of the Center of Sun Gear in a Stoeckicht Planetary Gear[J]. Bulletin of the JSM E, 22 (167): 748- 753

(责任编辑 王震华)

Nonlinear Dynamic Modeling and Dynamic Tooth Loads Analysis of Star Gearing System

SUN Zhim in, SHEN Yunwen, WANG Sanmin, HOU Yu

(Mechanical Engineering Dept., Northwest Polytechnic University, Xi'an 710072, China)

Abstract: A torsional and translational nonlinear vibration mathematical model was established to predict the dynamic characteristics of the star gearing system. The time-varying mesh stiffness, gear composite errors, run-out errors and gear backlashes were considered. A numerical method was applied to solving the large parametrically excited nonlinear multi-DOF dynamic system. A numerical example was also presented. From the results, the influences of the time-varying meshing stiffness, run-out errors and backlashes on the dynamic responses and dynamic gear tooth loads were investigated respectively. The dynamic load equalizations among star gears were also analyzed under the existence of gear run-out errors. In comparison with some calculated results from the literature^[3,9], the numerical results presented show a good agreement.

Key words: planetary gearing drives; nonlinear vibration; dynamics